# משפט ריימן

יהי שמתכנס בתנאי ויהי . אזי אפשר לסדר את הטור מחדש כך שהטור החדש מתכנס לL גם אפשר לסדר את הטור כך שהטור החדש לא יתכנס בכלל

## מסקנה

אם הטור מתכנס לכל תמורה אזי מתכנס בהחלט.

נשים את האיברים בשתי מחלקות: כאשר אם ו כאשר והאיברים בB וC מופיעים לפי הסדר המקורי. לכל או או

## טענות

### הוכחה

1. שכן .  
   נניח שכבר הוכחנו (2) ו(3) כך שזה ברור שיש אינסוף איברים ואינסוף איברים , ויהי . קיים N כך שאם אזי (שכן ). טענה: גם אם שכן ואם ולכן ז"א ובאותו אופן רואים ש

2,3) נניח שלא אזי יש 3 אפשרויות:

אם א) מתקיים אזי הטור , אבל זהו טור חיובי ולכן מתכנס לאותו הסכום עבור כל סדר שהוא אבל אפשר לרשום אותו כ(בסדר המקורי) בניגד לכך ש ע"פ ההנחה ש מתכנס בתנאי.

ב) בנסיבות אלה ומכאן בניגוד להנחה

ג) אותו דבר כמו ב)

## הוכחה(למשפט ריימן)

איך מסדרים מחדש כך שהטור עם הסדר החדש ישאף ל?

נקח איברים עד ש. ואז נוסיף . נבחר באיברים כך ש. עכשיו נוסיף . באופן האינדוקטיבי הזה נגדיר אינדקסים . כך שבשלב הkי השתמשנו ב וב  
אנחנו משתמשים בכל האיברים של b וc והטור תמיד גדול מk לכן הטור שואף לאינסוף. באותה דרך אפשר ליצור טור ששואף למינוס אינסוף. בשביל טור מתבדר פשוט אפשר להוסיף בכל שלב איברים של כך שסכום הטור קטן מ , ואז להוסיף איברי עד שסכום הטור יהיה גדול מ1 וחוזר חלילה.

עכשיו נניח ש. ניקח כך ש נוסיף כך ש הינו האינדקס הראשון כך ש ממשיכים בצורה כזאת: מוסיפים עד ש וכך הלאה.

אנחנו תמיד מתנודנדים בסביבה של L. כיוון ש אפשר תמיד להגיע לשלב שבו התנודה מספיק קטנה ולכן הטור מתכנס לL

יהיו טורים. נתבונן בטבלה:

# משפט

אם ו מתכנסים בהחלט, אזי כל טור המורכב מכל האיברים בכל סדר שהוא יתכנס לסכום באשר ,

## הוכחה

נסמן את טור המכפלות ב באשר כל עבור i וj מסויים. נקבע N ונקח M האינדקס במקסימלי מכל האינדקסים i וj כך ש עבור

*מכאן מתכנס ז"א מתכנס בהחלט. לכן כל תור שיתקבל מ ע"י שינוי סדר האיברים מתכנסו לסכום של*

*נסדר את האיברים לפי הסדר . נסמן את האיבר הnי בסדר ע"י וב מחד ו ע"פ מה שאמרנו כבר. לכן*

## הערה

המשפט לא נכון עבור טורים שאינם מתכנסים בהחלט

. ע"פ לייבניץ אבל . באלכסון הnי יש האיברים:

# מעכשיו והלאה

נרשום טורים

# דוגמה

לפי מבחן דאלמבר טור זה מתכנס בהחלט לכל נתבונן בטור

אם אז

# משפט(מרטנס Mertens)

נניח ש ו ולפחות אחד מהם, נגיד , מתכנס בהחלט. נסמן ב אזי